Concours GMEC session 2015

Composition : Physique 2 (électricité, optique)

Durée : 4 Heures

Cette épreuve comporte 2 parties : l'électricité et l'optique. Les sous-parties A et B de l'électricité sont indépendantes. Elles seront traitées séparément. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre .On attachera un grand soin à la présentation des copies.

I. ELECTRICITÉ

A. Électromagnétisme

Cette partie comporte 2 sous-parties (A.1 et A.2) qui sont entièrement indépendantes.

A.1. Questions de cours

1. Rappeler les équations de Maxwell dépendant des sources. Donner leurs noms.

2. Etablir les formes intégrales de ces équations. Donner leurs noms.

A.2. Étude d'un câble coaxial en régime statique et en régime sinusoïdal

Un câble est constitué par deux cylindres coaxiaux conducteurs infiniment minces, d'axe OZ. Le conducteur extérieur, la gaine (2) a un rayon égal à R_2. Le conducteur intérieur, l'âme (1) a un rayon égal à R_1. Les conducteurs sont parfaits et la ligne est infiniment longue selon OZ. L'espace inter-conducteur est vide.

3. Le câble coaxial constitue un condensateur lorsque (1) est porté au potentiel V_1 et (2) au potentiel V_2.

- **3.1.** Déterminer la capacité Γ par unité de longueur de câble.
- **3.2.** Donner l'expression de l'énergie électrostatique W_e par unité de longueur de ce condensateur en fonction de Γ, V_1 et V_2.
- **3.3.** Retrouver l'expression de Γ à partir de la localisation de l'énergie électrostatique.

4. Les conducteurs (1) et (2) sont maintenant parcourus respectivement par des intensités de courant constants $+I$ (positive selon OZ) et $-I$ réparties uniformément en surface sur (1) et (2).

- **4.1.** Déterminer les vecteurs densités surfaciques de courants respectifs $\vec{j}_{S1}$ et $\vec{j}_{S2}$ en fonction de I, R_1, R_2 et $\vec{k}$.
- **4.2.** Calculer l'énergie magnétique W_m par unité de longueur de câble.
- **4.3.** En déduire l'inductance propre Λ par unité de longueur de câble.

5. Déterminer les expressions du produit $\Lambda.\Gamma$, ainsi que l'impédance d'onde définie par $Z_0^2 = \Lambda/\Gamma$.

6. Calculer numériquement Λ, Γ et Z_0.

On donne : $R_1 = 10\ cm$, $R_2 = 15\ cm$, $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$.

L'âme est maintenant parcourue par un courant représenté par $I(z,t) = I(z)e^{-j\omega t}$ en notation complexe. La gaine est parcourue par $-I$. On considère que le champ $\vec{E}$ créé par le câble est : $\vec{E} = E(r,z,t)\ \vec{e}_r$.

7. Exprimer $\vec{B}$ dans l'espace vide entre les cylindres.

8. En déduire $\vec{E}$ en fonction de $I(z)$.

9. Trouver alors l'équation différentielle régissant les variations spatiales de $I(z)$ et la résoudre.

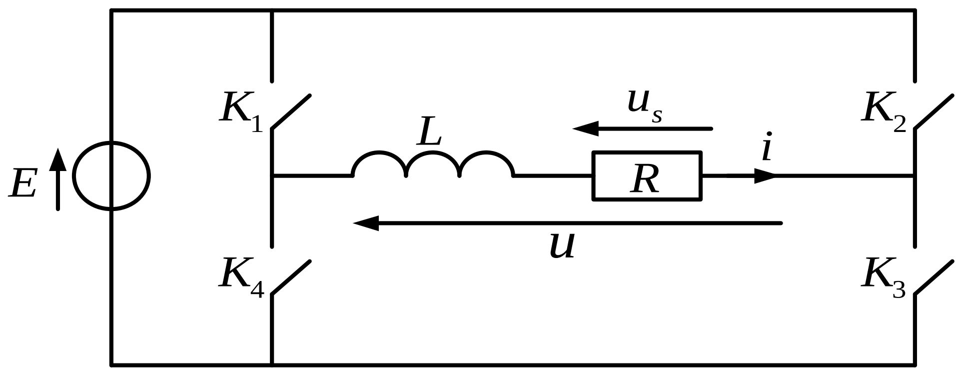
10. On prend maintenant $I(z) = I_0\ e^{-jkz}$ en notation complexe avec $k = \omega/c$. Calculer le vecteur de Poynting et en déduire la puissance moyenne transportée par le câble.

On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{k} \quad \text{avec } \vec{V}(V_r, V_\theta, V_z).$$

B. Électrocinétique

On désire convertir la tension continue en tension alternative. Pour ce faire, on réalise le montage représenté sur la figure ci-dessous :



Les quatre interrupteurs bidirectionnels K_1, K_2, K_3 et K_4 sont commandés électriquement de telle façon que :

Pour $nT < t < (n+1/2)T$ K_1 et K_3 sont fermés K_2 et K_4 ouverts

Pour $(n+1/2)T < t < (n+1)T$ K_1 et K_3 sont ouverts K_2 et K_4 fermés.

Le générateur est une source de tension idéale de force électromotrice E constante. L est une inductance pure dite de lissage et R une résistance, représentant la charge.

1. Tracer la courbe $u(t)$ en indiquant les points remarquables.

2. Écrire simplement l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$, courant circulant dans la charge.

3. Si $i_1(t)$ est la solution de cette équation pour $0 < t < T/2$ et $i_2(t)$ la solution de cette équation pour $T/2 < t < T$, déterminer les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction de R, L

et E, et en fonction de deux constantes d'intégration A_1 et A_2 que l'on ne cherchera pas à calculer pour l'instant. On pose $\tau = L/R$.

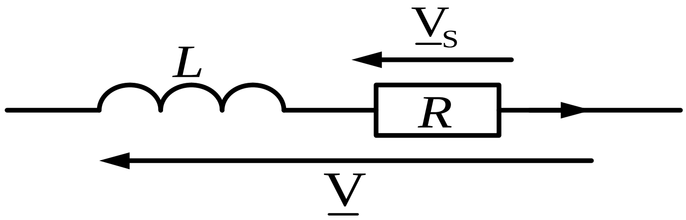
On se place en régime permanent et on cherche à déterminer les valeurs de A_1 et A_2. On pose que $\alpha = \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)$.

4. Écrire la condition pour le courant en $t = T/2$; justifier. On obtient une première équation entre A_1 et A_2.

5. En écrivant que le courant est périodique, écrire une seconde relation entre A_1 et A_2. Résoudre le système ainsi trouvé.

6. Exprimer $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Tracer le graphe $i(t)$ en faisant apparaitre les points remarquables.

On va maintenant étudier l'influence de l'inductance pure.



7. Montrer que pour une tension V sinusoidale de pulsation ω, l'ensemble se comporte comme un filtre passe-bas du premier ordre. Pour cela, on calculera en notant $\underline{V}$ et $\underline{V_S}$ les grandeurs complexes associées aux tensions, la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{V_S}/\underline{V}$ que l'on exprimera en fonction de ω et τ. Puis on étudiera le comportement du module H de $\underline{H}(j\omega)$ pour les grandes et les petites pulsations.

8. Déterminer la pulsation de coupure ω_C du filtre en fonction de τ.

9. La tension $u(t)$ de la question **1.** admet une décomposition en série de Fourier de la forme :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1} \sin\big((2k+1)\omega_0 t\big) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad b_{2k+1} = \frac{4E}{(2k+1)\pi}$$

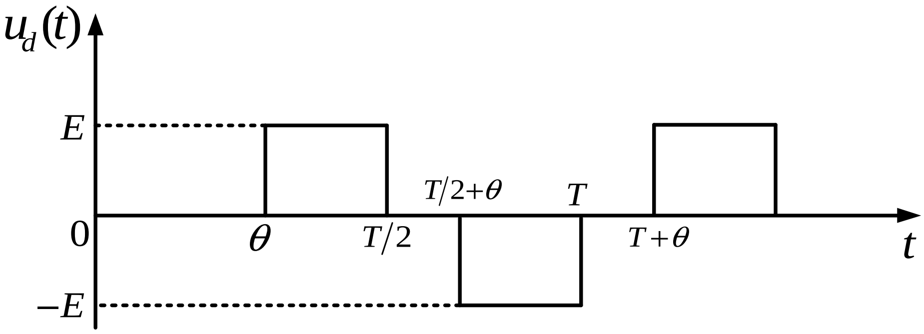
De même la tension $u_S(t)$ admet une décomposition en série de Fourier de la forme :

$$u_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_n \sin(n\omega_0 t + \phi_{Sn})$$

Justifier le fait que seuls les coefficients β_n correspondant à des n impairs soient différents de 0. Calculer les coefficients β_1 et β_3 de la décomposition en série de Fourier de la tension $u_S(t)$.

10. Déterminer le rapport $B = \beta_3 / \beta_1$ que l'on exprimera en fonction de ω_0 et τ. Le calculer dans le cas $\omega_0 = \omega_C$.

Pour alimenter la charge avec un courant quasi-sinusoïdal, on modifie la commande des interrupteurs pour modifier la tension $u(t)$ et obtenir une tension $u_d(t)$ représentée sur la figure suivante.



Cette tension admet la décomposition en série de Fourier suivante :

$$u_d(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\omega_0\theta}{2}\right)\sin\left(\omega_0\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{\cos\left(\frac{3\omega_0\theta}{2}\right)}{3}\sin\left(3\omega_0\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\cos\left(\frac{5\omega_0\theta}{2}\right)}{3}\sin\left(5\omega_0\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right) + \cdots\right]$$

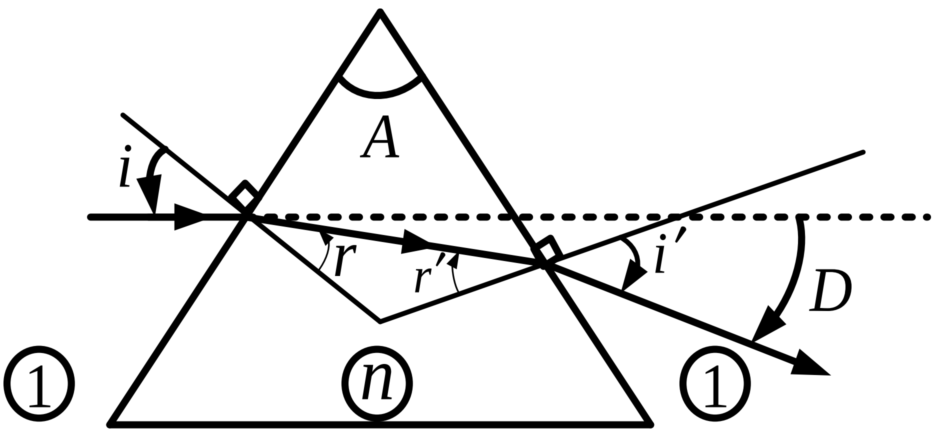
11. Comment faut-il choisir θ pour que l'harmonique de rang 3 soit nul ? Dans ce cas, calculer pour la plus petite valeur positive de θ et pour $\omega_0 = \omega_C$, le rapport $D = d_5 / d_1$, où d_5 est l'amplitude de l'harmonique de rang 5 et d_1 est l'amplitude du fondamental (ou l'harmonique de rang 1) de la tension aux bornes de R. Conclure.

12. Donner dans ces conditions, en fonction de E et R, la puissance moyenne sur une période reçue par la charge (la résistance R).

II. OPTIQUE

Indiquer pour chacune des questions suivantes la ou les réponses justes. Chaque question peut comporter au plus 4 réponses exactes. Tout choix de réponse doit être justifié.

1. On considère un prisme, d'indice n, d'angle au sommet $A = 60°$, placé dans l'air et éclairé par un faisceau de lumière parallèle, issu d'une lampe à vapeur de mercure (source de lumière blanche). Un rayon incident pénétrant dans le milieu sous l'angle i émerge suivant l'angle i'.



Soit r et r' les angles d'émergence et d'incidence respectivement sur les faces d'entrée et de sortie du prisme, et soit D l'angle de déviation entre rayon incident et rayon transmis.
Les relations fondamentales valables pour cette expérience sont :

A) $\sin i = -n \sin r$ ***B***) $n \sin i' = \sin r'$ ***C***) $A = r + r'$ ***d***) $D = i + i' - A$

2. Concernant le faisceau transmis par le prisme :

A) C'est un faisceau coloré ***B***) C'est un faisceau convergent

C) La longueur d'onde correspondant à la couleur rouge sera plus déviée que celle correspondant à la couleur verte.

D) La longueur d'onde correspondant à la couleur violette sera plus déviée que celle correspondant à la couleur indigo.

3. On suppose que $n = 1{,}6201$. Pour que la mesure de D soit possible, les angles i et i' doivent vérifier :

A) $i \leq 37{,}15\,°$ ***B***) $37{,}15° \leq i \leq 90°$ ***C***) $i' \leq 37{,}15°$ ***D***) $37{,}15° \leq i' \leq 90°$

4. Il existe des valeurs maximale D_M et minimale D_m de l'angle de déviation, telles que :

A) $D_m = 37{,}15°$ ***B***) $D_m = 48{,}2°$ ***C***) $D_M = 48{,}2°$ ***D***) $D_M = 90°$

5. Sachant que l'incertitude de mesure de l'angle au sommet A et de l'angle D_m est de 1 minute d'angle, l'incertitude sur n est de :

A) $1{,}40.10^{-2}$ ***B***) $0{,}47.10^{-2}$ ***C***) $0{,}04.10^{-2}$ ***D***) $0{,}02.10^{-2}$